

Tétel. Legyen T egy tetszőleges test és $m \in T[x]$ egy tetszőleges polinom. A $T[x]/(m)$ maradékosztály-gyűrű akkor és csak akkor test, ha m irreducibilis T felett.

Biz. Először tfh. m irreducibilis. Tudjuk, hogy $T[x]/(m)$ gyűrű. Ennek a gyűrűnek legalább két eleme van; például és két olyan polinom, amelyek nem kongruensek modulo m . Be kell látnunk, hogy $T[x]/(m)$ minden nemnulla elemének van Legyen $\bar{0} \neq \bar{f} \in T[x]/(m)$. Ekkor $m \nmid f$, és így $\text{lko}(f, m)$, mert m Az előadásvázlatbeli szerint az \bar{f} maradékosztálynak van multiplikatív inverze. Ezzel beláttuk, hogy $T[x]/(m)$ test.

Most tfh. m nem irreducibilis és m legalább elsőfokú. Ekkor vannak olyan $f, g \in T[x]$ polinomok, amelyekre $m = \dots\dots\dots$ és $\deg f, \deg g \dots\dots\dots$. Ebből következik, hogy $\bar{f} \cdot \bar{g} = \dots\dots\dots$, de $\bar{f}, \bar{g} \dots\dots\dots$. Ezek alapján \bar{f} és $\bar{g} \dots\dots\dots$ a $T[x]/(m)$ gyűrűben, és így nincs multiplikatív inverzük. Tehát $T[x]/(m)$ nem test.

Hátravan még az az eset, amikor $m \dots\dots\dots$ polinom. Ha $m = 0$, akkor két polinom akkor és csak akkor kongruens modulo m , ha Ekkor tehát a $T[x]/(m)$ gyűrű izomorf magával a $T[x]$ gyűrűvel, ami nyilván nem test (például az polinomnak nincs multiplikatív inverze). Végül, ha $m = 0$, akkor $T[x]/(m)$ azért nem test, mert □