

Formas
Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

CEFET/MG – Unidade Timóteo

17 de Junho de 2016

Formas
Quadráticas

Egmon Pereira

Definição
Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01
Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Teorema 02
Teorema 03

FIM

- 1 Definição
 - Exemplo 01
- 2 Mudanças de Variáveis
 - Teorema 01
 - Exemplo 02
- 3 Formas Quadráticas na Geometria
- 4 Identificando Seções Cônicas
 - Exemplo 03
- 5 Formas Quadráticas
 - Teorema 02
 - Teorema 03
- 6 FIM

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

- Forma Linear:

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

- Forma Linear:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

- Forma Linear:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

- Forma Linear:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

- Forma Linear:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

Todas as variáveis estão numa forma *linear*, na primeira potência e não existem produtos de variáveis.

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

- Forma Quadráticas:

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

- Forma Quadráticas:
 - a) Termos Mistos:

- Forma Quadráticas:
- a) Termos Mistos:

$$a_k x_i x_j$$

- Forma Quadráticas:
- a) Termos Mistos:

$$a_k x_i x_j$$
$$a_1 x_1^2, a_2 x_2^2, \dots, a_n x_n^2$$

- Forma Quadráticas:

a) Termos Mistos:

$$a_k x_i x_j$$
$$a_1 x_1^2, a_2 x_2^2, \dots, a_n x_n^2$$

Combinando os termos $x_i x_j$ com $x_j x_i$ evitamos duplicação desses termos e assim teremos:

- Forma Quadráticas:

a) Termos Mistos:

$$a_k x_i x_j$$
$$a_1 x_1^2, a_2 x_2^2, \dots, a_n x_n^2$$

Combinando os termos $x_i x_j$ com $x_j x_i$ evitamos duplicação desses termos e assim teremos:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 \quad (1)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Forma Quadrática arbitrária de R^3 :

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_3 + 2a_6x_2x_3 \quad (2)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Expressando (1) e (2) como Matriz, temos:

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Expressando (1) e (2) como Matriz, temos:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + 2a_3x_1x_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Expressando (1) e (2) como Matriz, temos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \quad (3)$$

Em R^3 :

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_3 + 2a_6x_2x_3 =$$
$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Nota:

Observe que a matriz **A** nessas fórmulas é simétrica e que suas entradas na diagonal são os coeficientes dos termos quadrados e que suas entradas fora da diagonal são a metade dos coeficientes dos termos mistos.

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_3 + 2a_6x_2x_3 \quad (5)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_3 + 2a_6x_2x_3$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Em geral, se \mathbf{A} é uma matriz simétrica $n \times n$ e \mathbf{x} é um vetor-coluna $n \times 1$ de variáveis, então:

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (6)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Quando for conveniente, (6) pode ser expressa em notação de produto escalar como:

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Quando for conveniente, (6) pode ser expressa em notação de produto escalar como:

$$\begin{aligned}Q_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (A \mathbf{x})\end{aligned}$$

Quando for conveniente, (6) pode ser expressa em notação de produto escalar como:

$$\begin{aligned}Q_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (A \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x} \cdot A \mathbf{x}\end{aligned}$$

Quando for conveniente, (6) pode ser expressa em notação de produto escalar como:

$$\begin{aligned}Q_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (A \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x} \cdot A \mathbf{x} \\ Q_A(\mathbf{x}) &= A \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \quad (7)\end{aligned}$$

Nos casos em que \mathbf{A} é uma matriz diagonal, a forma quadrática Q_A não tem termos mistos, logo, a matriz $n \times n$ fica:

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x}$$

Nos casos em que \mathbf{A} é uma matriz diagonal, a forma quadrática Q_A não tem termos mistos, logo, a matriz $n \times n$ fica:

$$\begin{aligned} Q_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{X}^T \mathbf{I} \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{X} \end{aligned}$$

Nos casos em que \mathbf{A} é uma matriz diagonal, a forma quadrática Q_A não tem termos mistos, logo, a matriz $n \times n$ fica:

$$\begin{aligned} Q_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{X}^T \mathbf{I} \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} \end{aligned}$$

Nos casos em que \mathbf{A} é uma matriz diagonal, a forma quadrática Q_A não tem termos mistos, logo, a matriz $n \times n$ fica:

$$\begin{aligned} Q_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 \end{aligned}$$

Nos casos em que \mathbf{A} é uma matriz diagonal, a forma quadrática Q_A não tem termos mistos, logo, a matriz $n \times n$ fica:

$$\begin{aligned} Q_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{X}^T \mathbf{I} \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} \\ &= \|\mathbf{X}\|^2 \\ Q_A(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \quad (8) \end{aligned}$$

E se \mathbf{A} tem entradas diagonais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ então:

$$Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$$

E se \mathbf{A} tem entradas diagonais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;
então:

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$$

$$Q_A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

E se \mathbf{A} tem entradas diagonais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;
então:

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$$

$$Q_A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$Q_A(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \quad (9)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Expresse a Forma Quadrática em notação
Matricial $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, com \mathbf{A} simétrica.

$$2x^2 + 6xy - 5y^2$$

Expresse a Forma Quadrática em notação Matricial $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, com \mathbf{A} simétrica.

$$2x^2 + 6xy - 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$$

Expresse a Forma Quadrática em notação Matricial $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, com \mathbf{A} simétrica.

$$2x^2 + 6xy - 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 01

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Expresse a Forma Quadrática em notação
Matricial $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, com \mathbf{A} simétrica.

$$2x^2 + 6xy - 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Três problemas que ocorrem na aplicação de Formas Quadráticas:

- 1 - Se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é uma *FQ* de \mathbf{R}^2 ou \mathbf{R}^3 , que tipo de curva ou superfície é representada pela equação $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = k$?

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Três problemas que ocorrem na aplicação de Formas Quadráticas:

2 - Se $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é uma *FQ* de \mathbf{R}^n , que condições deve satisfazer A para garantir que $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ tenha valores positivos para $\mathbf{x} \neq 0$?

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Três problemas que ocorrem na aplicação de Formas Quadráticas:

3 - Se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é uma *FQ* de \mathbf{R}^n , quais são os valores máximo e mínimo da *FQ* com x condicionado a satisfazer $\|x\| = 1$?

Vamos responder apenas 1 e 2¹

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Simplificando $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ com substituição, temos:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y} \quad (10)$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Simplificando $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ com substituição, temos:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y} \quad (10)$$

- Se P é invertível, então (10) é denominada uma **Mudança de Variáveis**

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Simplificando $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ com substituição, temos:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y} \quad (10)$$

- Se P é invertível, então (10) é denominada uma **Mudança de Variáveis**
- Se P é ortogonal, então (10) é denominada uma **Mudança de Variável Ortogonal**

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas

Quadráticas na Geometria

Identificando

Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas

Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas

Quadráticas na Geometria

Identificando

Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas

Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Teorema dos Eixos Principais

Se A é uma matriz simétrica $n \times n$, então existe uma mudança de variáveis ortogonal que transforma a Forma Quadrática $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ em $\mathbf{y}^T D \mathbf{y}$ sem termos mistos. Especificamente, se P diagonaliza ortogonalmente A , então a mudança de variáveis $\mathbf{x} = P \mathbf{y}$ na FQ fica:

Teorema dos Eixos Principais

Se A é uma matriz simétrica $n \times n$, então existe uma mudança de variáveis ortogonal que transforma a Forma Quadrática $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ em $\mathbf{y}^T D \mathbf{y}$ sem termos mistos. Especificamente, se P diagonaliza ortogonalmente A , então a mudança de variáveis $\mathbf{x} = P \mathbf{y}$ na FQ fica:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y}$$

Teorema dos Eixos Principais

Se A é uma matriz simétrica $n \times n$, então existe uma mudança de variáveis ortogonal que transforma a Forma Quadrática $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ em $\mathbf{y}^T D \mathbf{y}$ sem termos mistos. Especificamente, se P diagonaliza ortogonalmente A , então a mudança de variáveis $\mathbf{x} = P \mathbf{y}$ na FQ fica:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Teorema dos Eixos Principais

Na qual $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de A associados aos autovetores que constituem as colunas sucessivas de P .

Exemplo 02

Encontre uma mudança de variáveis ortogonal que elimine os termos mistos da FQ

$Q = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$, e expresse Q em termos das novas variáveis.

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

$$Q = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

$$Q = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$
$$Q = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Equação Característica:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

Equação Característica:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda^3 - 9\lambda = 0$$

Equação Característica:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0$$

Equação Característica:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0$$

Logo, os autovalores são: $\lambda = 0$, $\lambda = -3$ e $\lambda = 3$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Calculando os autovetores, temos:

$$\begin{array}{ccc} p/ \lambda = 0 : & p/ \lambda = -3 : & p/ \lambda = 3 : \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

A substituição $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ que elimina os termos mistos é:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Isso produz a nova forma quadrática:

$$Q = \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y}$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Isso produz a nova forma quadrática:

$$Q = \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y}$$

$$Q = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Isso produz a nova forma quadrática:

$$Q = \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y}$$

$$Q = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$Q = -3y_2^2 + 3y_3^2 \quad (11)$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Isso produz a nova forma quadrática:

$$Q = \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y}$$

$$Q = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$Q = -3y_2^2 + 3y_3^2 \quad (11)$$

Compare a equação inicial com o resultado

$$Q = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Isso produz a nova forma quadrática:

$$Q = \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y}$$

$$Q = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$Q = -3y_2^2 + 3y_3^2 \quad (11)$$

Compare a equação inicial com o resultado

$$Q = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

$$Q = -3y_2^2 + 3y_3^2$$

Em (11) não há termos mistos.

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

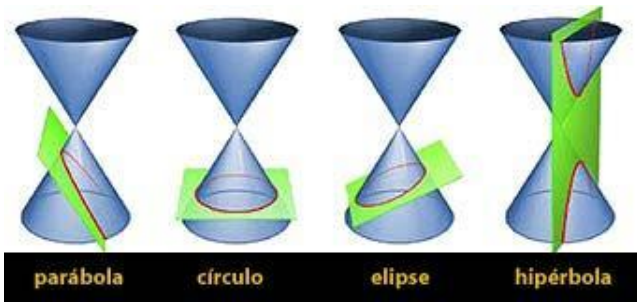
Teorema 02

Teorema 03

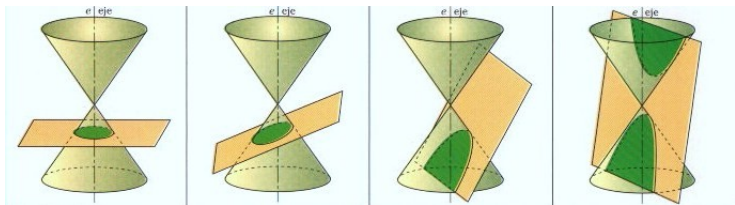
FIM

Uma **Seção Cônica** é uma curva obtida cortando um cone circular reto por um plano.

Uma **Seção Cônica** é uma curva obtida cortando um cone circular reto por um plano.



Uma **Seção Cônica** é uma curva obtida cortando um cone circular reto por um plano.



Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Uma equação pode ser da forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (12)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Uma equação pode ser da forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (12)$$

Se $d = e = f = 0$, então (12) se reduz a:

Uma equação pode ser da forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (12)$$

Se $d = e = f = 0$, então (12) se reduz a:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0 \quad (13)$$

Uma equação pode ser da forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (12)$$

Se $d = e = f = 0$, então (12) se reduz a:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0 \quad (13)$$

Denominada de **Cônica Central** ou **Reduzida**.

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Se em (13) $f \neq 0$, então podemos dividir tudo por f e reescrever a equação na forma:

$$a'x^2 + b'y^2 = 1 \quad (14)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Se em (13) $f \neq 0$, então podemos dividir tudo por f e reescrever a equação na forma:

$$a'x^2 + b'y^2 = 1 \quad (14)$$

Podemos escolher valores para a' e b' de tal forma a obtermos uma das cônicas citadas acima.

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Elipse:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (15)$$
$$\alpha \geq \beta > 0$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

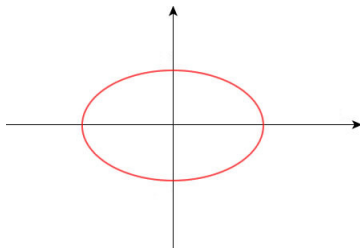
Teorema 02

Teorema 03

FIM

Elipse:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (15)$$
$$\alpha \geq \beta > 0$$



Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Elipse:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (16)$$
$$\beta \geq \alpha > 0$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

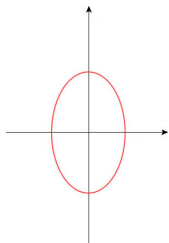
Teorema 02

Teorema 03

FIM

Elipse:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (16)$$
$$\beta \geq \alpha > 0$$



Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Hipérbole:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (17)$$
$$\alpha > 0 \quad \beta > 0$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

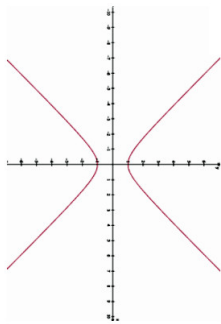
Teorema 02

Teorema 03

FIM

Hipérbole:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (17)$$
$$\alpha > 0 \quad \beta > 0$$



Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Hipérbole:

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 \quad (18)$$
$$\alpha > 0 \quad \beta > 0$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

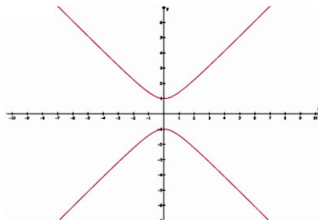
Teorema 02

Teorema 03

FIM

Hipérbole:

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 \quad (18)$$
$$\alpha > 0 \quad \beta > 0$$



Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

**Identificando
Seções Cônicas**

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Resolvendo o problema 1, ou seja, identificar a curva representada pela equação $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = k$ em duas ou três variáveis.

Resolvendo o problema 1, ou seja, identificar a curva representada pela equação $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = k$ em duas ou três variáveis.

Para encontrar uma rotação que elimine os termos mistos da equação

$$ax^2 + 2bxy + c^2 + f = 0$$

Resolvendo o problema 1, ou seja, identificar a curva representada pela equação $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = k$ em duas ou três variáveis.

Para encontrar uma rotação que elimine os termos mistos da equação

$$ax^2 + 2bxy + c^2 + f = 0$$

É conveniente passar o termo constante para o lado direito:

$$ax^2 + 2bxy + c^2 = k$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

**Identificando
Seções Cônicas**

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Em notação matricial, temos:

$$x^T A x = k$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

**Identificando
Seções Cônicas**

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Em notação matricial, temos:

$$x^T A x = k$$

$$x^T A x = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Em notação matricial, temos:

$$\begin{aligned}x^T Ax &= k \\x^T Ax &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\k &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (19)\end{aligned}$$

Para girar os eixos coordenados, precisamos fazer uma mudança de variáveis ortogonal:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

Na qual $\det(P) = 1$

Para girar os eixos coordenados, precisamos fazer uma mudança de variáveis ortogonal:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

Na qual $\det(P) = 1$

Para acharmos o ângulo de rotação, faremos:

$$p = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (20)$$

Exemplo 03

- a) Identifique a cônica de equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ girando os eixos xy até colocar a cônica em posição canônica.

Exemplo 03

- a) Identifique a cônica de equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ girando os eixos xy até colocar a cônica em posição canônica.
- b) Encontre o ângulo θ pelo qual foram girados os eixos xy na parte a.

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

A equação dada pode ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 36$$

A equação dada pode ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 36$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

O polinômio característico de A é:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

O polinômio característico de A é:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

Logo, os autovalores são: $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 9$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

E portanto, após breve e simples cálculos,
temos os autovalores:

É portanto, após breve e simples cálculos, temos os autovalores:

$$p/\lambda = 4 :$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$p/\lambda = 9 :$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Assim, A é ortogonalmente diagonalizável por:

Assim, A é ortogonalmente diagonalizável por:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Observe que o $\det(P) = 1$, logo:

Observe que o $\det(P) = 1$, logo:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 36$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Que pode ser reescrito como:

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Que pode ser reescrito como:

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Que pode ser reescrito como:

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36$$

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Para resolver b , temos:

Para resolver b , temos:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Para resolver b , temos:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Sendo assim, temos:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

Sendo assim, temos:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos \theta &= \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Sendo assim, temos:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arctan \frac{1}{2}$$

Sendo assim, temos:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arctan \frac{1}{2}$$

$$\theta \approx 26,6^\circ$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM

O 2º Problema

Agora vamos considerar o segundo dos três problemas propostos acima. Vamos determinar as condições sob as quais $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para quaisquer valores não nulos de \mathbf{x} .

Teorema 02

Uma Forma Quadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é dita:

Teorema 02

Uma Forma Quadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é dita:

- **Positiva definida** se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$

Teorema 02

Uma Forma Quadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é dita:

- **Positiva definida** se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$
- **Negativa definida** se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$

Teorema 02

Uma Forma Quadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é dita:

- **Positiva definida** se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$
- **Negativa definida** se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$
- **Indefinida** se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ tem valores tanto positivos quanto negativos.

Teorema 03

Se A é uma matriz simétrica, então:

Teorema 03

Se A é uma matriz simétrica, então:

- (a) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é positiva definida \Leftrightarrow todos os autovalores de A são positivos

Teorema 03

Se A é uma matriz simétrica, então:

- (a) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é positiva definida \Leftrightarrow todos os autovalores de A são positivos
- (b) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é negativa definida \Leftrightarrow todos os autovalores de A são negativos

Teorema 03

Se A é uma matriz simétrica, então:

- (a) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é positiva definida \Leftrightarrow todos os autovalores de A são positivos
- (b) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é negativa definida \Leftrightarrow todos os autovalores de A são negativos
- (c) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é indefinida $\Leftrightarrow A$ tem pelo menos um autovalor positivo e pelo menos um autovalor negativo.

Formas
Quadráticas

Egmon Pereira

Definição

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis

Teorema 01

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas

Teorema 02

Teorema 03

FIM



Orientadora: Prof. Lilian Givisiez
Álgebra Linear
www.egmon.com.br