

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

CEFET/MG – Unidade Timóteo

17 de Junho de 2016

- 1 Definição de Formas Quadráticas
 - Exemplo 01
- 2 Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas
 - Teorema dos Eixos Principais
 - Exemplo 02
- 3 Formas Quadráticas na Geometria
- 4 Identificando Seções Cônicas
 - Exemplo 03
- 5 Formas Quadráticas Positivas Definidas
 - Teorema 02
 - Teorema 03
- 6 FIM

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

- Forma Linear:

- Forma Linear:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

- Forma Linear:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

- Forma Linear:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

- Forma Linear:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

Todas as variáveis estão numa forma *linear*, na primeira potência e não existem produtos de variáveis.

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

- Forma Quadráticas:

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

- Forma Quadráticas:
 - a) Termos Mistos:

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

- Forma Quadráticas:
 - a) Termos Mistos:

$$a_k x_i x_j$$

- Forma Quadráticas:
- a) Termos Mistos:

$$a_k x_i x_j$$
$$a_1 x_1^2, a_2 x_2^2, \dots, a_n x_n^2$$

- Forma Quadráticas:

a) Termos Mistos:

$$a_k x_i x_j$$
$$a_1 x_1^2, a_2 x_2^2, \dots, a_n x_n^2$$

Combinando os termos $x_i x_j$ com $x_j x_i$ evitamos duplicação desses termos e assim teremos:

- Forma Quadráticas:

a) Termos Mistos:

$$a_k x_i x_j$$
$$a_1 x_1^2, a_2 x_2^2, \dots, a_n x_n^2$$

Combinando os termos $x_i x_j$ com $x_j x_i$ evitamos duplicação desses termos e assim teremos:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 \quad (1)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Forma Quadrática arbitrária de R^3 :

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_3 + 2a_6x_2x_3 \quad (2)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Expressando (1) e (2) como Matriz, temos:

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Expressando (1) e (2) como Matriz, temos:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + 2a_3x_1x_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Expressando (1) e (2) como Matriz, temos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \quad (3)$$

Em R^3 :

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_3 + 2a_6x_2x_3 =$$
$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando
Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Nota:

Observe que a matriz **A** nessas fórmulas é simétrica e que suas entradas na diagonal são os coeficientes dos termos quadrados e que suas entradas fora da diagonal são a metade dos coeficientes dos termos mistos.

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2a_4 x_1 x_2 + 2a_5 x_1 x_3 + 2a_6 x_2 x_3 \quad (5)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_3 + 2a_6x_2x_3$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Em geral, se \mathbf{A} é uma matriz simétrica $n \times n$ e \mathbf{x} é um vetor-coluna $n \times 1$ de variáveis, então:

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (6)$$

Quando for conveniente, (6) pode ser expressa em notação de produto escalar como:

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

Quando for conveniente, (6) pode ser expressa em notação de produto escalar como:

$$\begin{aligned}Q_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (A \mathbf{x})\end{aligned}$$

Quando for conveniente, (6) pode ser expressa em notação de produto escalar como:

$$\begin{aligned}Q_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A} \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \mathbf{x}\end{aligned}$$

Quando for conveniente, (6) pode ser expressa em notação de produto escalar como:

$$\begin{aligned}Q_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A} \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \mathbf{x} \\ Q_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{A} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \quad (7)\end{aligned}$$

Nos casos em que \mathbf{A} é uma matriz diagonal, a forma quadrática Q_A não tem termos mistos, logo, a matriz $n \times n$ fica:

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x}$$

Nos casos em que \mathbf{A} é uma matriz diagonal, a forma quadrática $Q_{\mathbf{A}}$ não tem termos mistos, logo, a matriz $n \times n$ fica:

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{X}^T \mathbf{I} \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{X} \end{aligned}$$

Nos casos em que \mathbf{A} é uma matriz diagonal, a forma quadrática Q_A não tem termos mistos, logo, a matriz $n \times n$ fica:

$$\begin{aligned} Q_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{X}^T \mathbf{I} \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} \end{aligned}$$

Nos casos em que \mathbf{A} é uma matriz diagonal, a forma quadrática Q_A não tem termos mistos, logo, a matriz $n \times n$ fica:

$$\begin{aligned} Q_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{X}^T \mathbf{I} \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} \\ &= \|\mathbf{X}\|^2 \end{aligned}$$

Nos casos em que \mathbf{A} é uma matriz diagonal, a forma quadrática Q_A não tem termos mistos, logo, a matriz $n \times n$ fica:

$$\begin{aligned} Q_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{X}^T \mathbf{I} \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} \\ &= \|\mathbf{X}\|^2 \\ Q_A(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \quad (8) \end{aligned}$$

E se \mathbf{A} tem entradas diagonais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$,
então:

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$$

E se \mathbf{A} tem entradas diagonais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;
então:

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$$

$$Q_A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

E se \mathbf{A} tem entradas diagonais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;
então:

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$$

$$Q_A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$Q_A(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \quad (9)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais
Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Expresse a Forma Quadrática em notação
Matricial $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, com \mathbf{A} simétrica.

$$2x^2 + 6xy - 5y^2$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais
Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Expresse a Forma Quadrática em notação
Matricial $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, com \mathbf{A} simétrica.

$$2x^2 + 6xy - 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$$

Expresse a Forma Quadrática em notação Matricial $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, com \mathbf{A} simétrica.

$$2x^2 + 6xy - 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Expresse a Forma Quadrática em notação Matricial $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, com \mathbf{A} simétrica.

$$2x^2 + 6xy - 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Três problemas que ocorrem na aplicação de Formas Quadráticas:

- 1 - Se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é uma *FQ* de \mathbf{R}^2 ou \mathbf{R}^3 , que tipo de curva ou superfície é representada pela equação $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = k$?

Três problemas que ocorrem na aplicação de Formas Quadráticas:

2 - Se $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é uma *FQ* de \mathbf{R}^n , que condições deve satisfazer A para garantir que $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ tenha valores positivos para $\mathbf{x} \neq 0$?

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas
Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Três problemas que ocorrem na aplicação de Formas Quadráticas:

3 - Se $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é uma *FQ* de \mathbf{R}^n , quais são os valores máximo e mínimo da *FQ* com \mathbf{x} condicionado a satisfazer $\|\mathbf{x}\| = 1$?

Vamos responder apenas 1 e 2¹

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas
Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Simplificando $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ com substituição, temos:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y} \quad (10)$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas

Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Simplificando $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ com substituição, temos:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y} \quad (10)$$

- Se \mathbf{P} é invertível, então (10) é denominada uma **Mudança de Variáveis**

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas

Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Simplificando $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ com substituição, temos:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y} \quad (10)$$

- Se P é invertível, então (10) é denominada uma **Mudança de Variáveis**
- Se P é ortogonal, então (10) é denominada uma **Mudança de Variável Ortogonal**

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Teorema dos Eixos Principais

Se A é uma matriz simétrica $n \times n$, então existe uma mudança de variáveis ortogonal que transforma a Forma Quadrática $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ em $\mathbf{y}^T D \mathbf{y}$ sem termos mistos. Especificamente, se P diagonaliza ortogonalmente A , então a mudança de variáveis $\mathbf{x} = P \mathbf{y}$ na FQ fica:

Teorema dos Eixos Principais

Se A é uma matriz simétrica $n \times n$, então existe uma mudança de variáveis ortogonal que transforma a Forma Quadrática $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ em $\mathbf{y}^T D \mathbf{y}$ sem termos mistos. Especificamente, se P diagonaliza ortogonalmente A , então a mudança de variáveis $\mathbf{x} = P \mathbf{y}$ na FQ fica:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y}$$

Teorema dos Eixos Principais

Se A é uma matriz simétrica $n \times n$, então existe uma mudança de variáveis ortogonal que transforma a Forma Quadrática $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ em $\mathbf{y}^T D \mathbf{y}$ sem termos mistos. Especificamente, se P diagonaliza ortogonalmente A , então a mudança de variáveis $\mathbf{x} = P \mathbf{y}$ na FQ fica:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas
Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Teorema dos Eixos Principais

Na qual $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de A associados aos autovetores que constituem as colunas sucessivas de P .

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Exemplo 02

Encontre uma mudança de variáveis ortogonal que elimine os termos mistos da FQ

$Q = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$, e expresse Q em termos das novas variáveis.

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

$$Q = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

$$Q = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$
$$Q = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Equação Característica:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Equação Característica:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda^3 - 9\lambda = 0$$

Equação Característica:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0$$

Equação Característica:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0$$

Logo, os autovalores são: $\lambda = 0$, $\lambda = -3$ e $\lambda = 3$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Calculando os autovetores, temos:

$$\begin{array}{ccc} p/ \lambda = 0 : & p/ \lambda = -3 : & p/ \lambda = 3 : \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

A substituição $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ que elimina os termos mistos é:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Isso produz a nova forma quadrática:

$$Q = \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y}$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Isso produz a nova forma quadrática:

$$Q = \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y}$$

$$Q = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Isso produz a nova forma quadrática:

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y} \\ Q &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ Q &= -3y_2^2 + 3y_3^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Isso produz a nova forma quadrática:

$$Q = \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y}$$

$$Q = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$Q = -3y_2^2 + 3y_3^2 \quad (11)$$

Compare a equação inicial com o resultado

$$Q = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Isso produz a nova forma quadrática:

$$Q = \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y}$$

$$Q = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$Q = -3y_2^2 + 3y_3^2 \quad (11)$$

Compare a equação inicial com o resultado

$$Q = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

$$Q = -3y_2^2 + 3y_3^2$$

Em (11) não há termos mistos.

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Uma **Seção Cônica** é uma curva obtida cortando um cone circular reto por um plano.

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

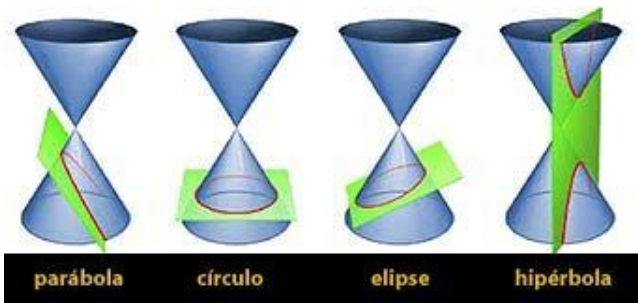
Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Uma **Seção Cônica** é uma curva obtida cortando um cone circular reto por um plano.



Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

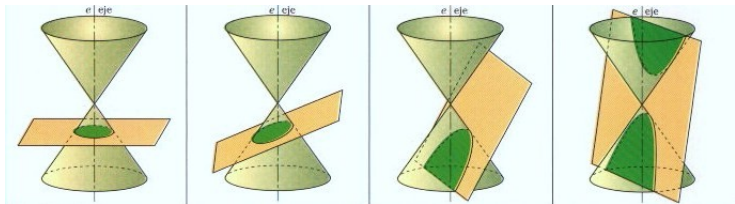
Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Uma **Seção Cônica** é uma curva obtida cortando um cone circular reto por um plano.



Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

**Formas
Quadráticas na
Geometria**

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Uma equação pode ser da forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (12)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Uma equação pode ser da forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (12)$$

Se $d = e = f = 0$, então (12) se reduz a:

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Uma equação pode ser da forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (12)$$

Se $d = e = f = 0$, então (12) se reduz a:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0 \quad (13)$$

Uma equação pode ser da forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (12)$$

Se $d = e = f = 0$, então (12) se reduz a:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0 \quad (13)$$

Denominada de **Cônica Central** ou **Reduzida**.

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Se em (13) $f \neq 0$, então podemos dividir tudo por f e reescrever a equação na forma:

$$a'x^2 + b'y^2 = 1 \quad (14)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Se em (13) $f \neq 0$, então podemos dividir tudo por f e reescrever a equação na forma:

$$a'x^2 + b'y^2 = 1 \quad (14)$$

Podemos escolher valores para a' e b' de tal forma a obtermos uma das cônicas citadas acima.

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Elipse:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (15)$$
$$\alpha \geq \beta > 0$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

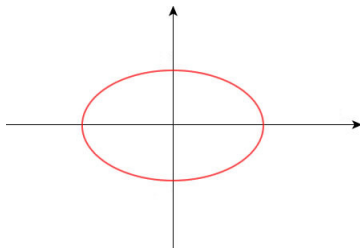
Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Elipse:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (15)$$
$$\alpha \geq \beta > 0$$



Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Elipse:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (16)$$
$$\beta \geq \alpha > 0$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

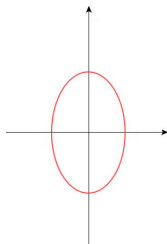
Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Elipse:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (16)$$
$$\beta \geq \alpha > 0$$



Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Hipérbole:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (17)$$
$$\alpha > 0 \quad \beta > 0$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

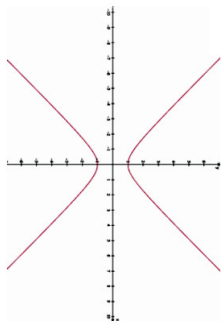
Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Hipérbole:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (17)$$
$$\alpha > 0 \quad \beta > 0$$



Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Hipérbole:

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 \quad (18)$$
$$\alpha > 0 \quad \beta > 0$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais

Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

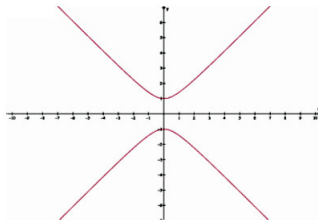
Identificando Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

Hipérbole:

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 \quad (18)$$
$$\alpha > 0 \quad \beta > 0$$



Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais
Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

**Identificando
Seções Cônicas**

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Resolvendo o problema 1, ou seja, identificar a curva representada pela equação $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = k$ em duas ou três variáveis.

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas

Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em

Formas

Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas

Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas

Quadráticas

Positivas Definidas

Resolvendo o problema 1, ou seja, identificar a curva representada pela equação $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = k$ em duas ou três variáveis.

Para encontrar uma rotação que elimine os termos mistos da equação

$$ax^2 + 2bxy + c^2 + f = 0$$

Resolvendo o problema 1, ou seja, identificar a curva representada pela equação $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = k$ em duas ou três variáveis.

Para encontrar uma rotação que elimine os termos mistos da equação

$$ax^2 + 2bxy + c^2 + f = 0$$

É conveniente passar o termo constante para o lado direito:

$$ax^2 + 2bxy + c^2 = k$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

**Identificando
Seções Cônicas**

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Em notação matricial, temos:

$$x^T A x = k$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais
Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

**Identificando
Seções Cônicas**

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Em notação matricial, temos:

$$x^T A x = k$$

$$x^T A x = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Em notação matricial, temos:

$$\begin{aligned}x^T Ax &= k \\x^T Ax &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\k &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (19)\end{aligned}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas

Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em

Formas

Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas

Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas

Quadráticas

Positivas Definidas

Para girar os eixos coordenados, precisamos fazer uma mudança de variáveis ortogonal:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

Na qual $\det(P) = 1$

Para girar os eixos coordenados, precisamos fazer uma mudança de variáveis ortogonal:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

Na qual $\det(P) = 1$

Para acharmos o ângulo de rotação, faremos:

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (20)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Exemplo 03

- a) Identifique a cônica de equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ girando os eixos xy até colocar a cônica em posição canônica.

Exemplo 03

- a) Identifique a cônica de equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ girando os eixos xy até colocar a cônica em posição canônica.
- b) Encontre o ângulo θ pelo qual foram girados os eixos xy na parte a.

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais
Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

A equação dada pode ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 36$$

Formas
Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais
Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

A equação dada pode ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 36$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Formas
Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

O polinômio característico de A é:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

O polinômio característico de A é:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

Logo, os autovalores são: $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 9$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais
Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

E portanto, após breve e simples cálculos,
temos os autovalores:

É portanto, após breve e simples cálculos, temos os autovalores:

$$p/\lambda = 4 :$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$p/\lambda = 9 :$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Assim, A é ortogonalmente diagonalizável por:

Assim, A é ortogonalmente diagonalizável por:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Observe que o $\det(P) = 1$, logo:

Observe que o $\det(P) = 1$, logo:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 36$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais
Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Que pode ser reescrito como:

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais
Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Que pode ser reescrito como:

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais
Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Que pode ser reescrito como:

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36$$
$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais
Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Para resolver b , temos:

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Para resolver b , temos:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Para resolver b , temos:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas

Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em

Formas

Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas

Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas

Quadráticas

Positivas Definidas

Sendo assim, temos:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Sendo assim, temos:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais
Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos \theta &= \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas

Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em

Formas

Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas

Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas

Quadráticas

Positivas Definidas

Sendo assim, temos:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arctan \frac{1}{2}$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais
Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas

Sendo assim, temos:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arctan \frac{1}{2}$$

$$\theta \approx 26,6^\circ$$

Formas Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de Formas Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

Teorema dos Eixos Principais
Exemplo 02

Formas Quadráticas na Geometria

Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03

Formas Quadráticas Positivas Definidas

O 2º Problema

Agora vamos considerar o segundo dos três problemas propostos acima. Vamos determinar as condições sob as quais $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para quaisquer valores não nulos de \mathbf{x} .

Teorema 02

Uma Forma Quadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é dita:

Teorema 02

Uma Forma Quadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é dita:

- **Positiva definida** se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$

Teorema 02

Uma Forma Quadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é dita:

- **Positiva definida** se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$
- **Negativa definida** se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$

Teorema 02

Uma Forma Quadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é dita:

- **Positiva definida** se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$
- **Negativa definida** se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$
- **Indefinida** se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ tem valores tanto positivos quanto negativos.

Teorema 03

Se A é uma matriz simétrica, então:

Teorema 03

Se A é uma matriz simétrica, então:

- (a) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é positiva definida \Leftrightarrow todos os autovalores de A são positivos

Teorema 03

Se A é uma matriz simétrica, então:

- (a) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é positiva definida \Leftrightarrow todos os autovalores de A são positivos
- (b) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é negativa definida \Leftrightarrow todos os autovalores de A são negativos

Teorema 03

Se A é uma matriz simétrica, então:

- (a) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é positiva definida \Leftrightarrow todos os autovalores de A são positivos
- (b) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é negativa definida \Leftrightarrow todos os autovalores de A são negativos
- (c) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é indefinida $\Leftrightarrow A$ tem pelo menos um autovalor positivo e pelo menos um autovalor negativo.

Formas
Quadráticas

Egmon Pereira

Definição de
Formas
Quadráticas

Exemplo 01

Mudanças de
Variáveis em
Formas
Quadráticas

Teorema dos Eixos
Principais

Exemplo 02

Formas
Quadráticas na
Geometria

Identificando
Seções Cônicas

Exemplo 03

Formas
Quadráticas
Positivas Definidas



Orientadora: Prof. Lilian Givisiez
Álgebra Linear
www.egmon.com.br